

19/02

Пример 3 (слаб. непр. ф-ция) $\mathcal{Y}(u) = \langle c, u \rangle$, $c \in H$ // линейный ф-ал $\forall \{u_k\} \xrightarrow{\text{слабо}} u_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Y}(u_n) \stackrel{?}{=} \mathcal{Y}(u_0)$
 $\uparrow$ фикс. эл-тВ шлоб. пр-ве: $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\langle c, u_n \rangle}_{\mathcal{Y}(u_n)} = \underbrace{\langle c, u_0 \rangle}_{\mathcal{Y}(u_0)}$, $\forall c \in H \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle c, u_n - u_0 \rangle = 0$ Пример 4 (слабо п/н снизу ф-ция) $\mathcal{Y}(u) = \|u\|^2$ // не слабо непр., но непр.1) $\forall \{u_n\} \xrightarrow{\text{слабо}} u_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Y}(u_n) \geq \mathcal{Y}(u_0)$ $\mathcal{Y}(u_n) = \|u_n\|^2 = \|u_n - u_0 + u_0\|^2 = \|u_n - u_0\|^2 + 2\langle u_n - u_0, u_0 \rangle + \|u_0\|^2 \geq$ $\geq 2\langle u_n - u_0, \overset{0}{u_0} \rangle + \mathcal{Y}(u_0)$ // переходим к $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y(u_n) \geq Y(u_0)$$

2) ~~мы хотим доказать~~ Ф-м, что $Y(u)$ не явл-ся слабо нпр.

Пусть $u_n = u_0 + t \cdot e_n$, где $t \in \mathbb{R}$, $\{e_n\}$ — ортонорм. с-ма, тогда: $u_n \xrightarrow{\text{слабо}} u_0$

$$\text{Тогда } Y(u_n) = \|u_n\|^2 = \|u_0 + t e_n\|^2 = \|u_0\|^2 + 2 \langle u_0, e_n \rangle t + \|e_n\|^2 t^2 \geq 2 \langle u_0, e_n \rangle t + Y(u_0) + t^2 \quad \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y(u_n) \geq Y(u_0) + t^2 \quad \text{рав-во невозможно} \Rightarrow \text{что}$$

Пример 5 $(B_R(B_H) = \{u \in H: \|u\|_H \leq R\})$ — слабо компакт. шар в гильб. пр-ве

Опр-ние слаб. комп-ти // $\forall \{u_k\} \in B_R(B_H), \|u_k\| \leq R$

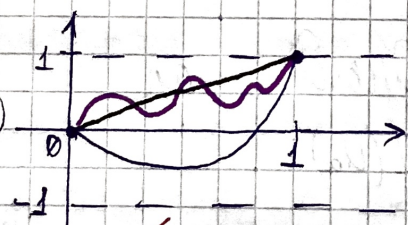
Слабый вариант Д-В // $\exists \{u_{k_m}\} \xrightarrow{\text{слабо}} u \in H \Rightarrow$ в силу слабой п/н связи $\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} Y(u_{k_m}) \geq Y(u)$,

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} Y(u_{k_m}) = \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_{k_m}\|^2 \leq R^2 \Rightarrow \text{эл-т} \in \text{шару} \Rightarrow \text{опр. слаб. компактности} \Rightarrow \text{что}$$

Пример 6 (дополнительный)

$$Y(u) = \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \inf, u \in \mathcal{U} = \{u(t) \in C[0,1]: u(0)=0, u(1)=1, |u(t)| \leq 1\}$$

$\mathcal{U}$ — опр. и замкн.



$$Y_* = 0, u(t) = 0 \in \mathcal{U}$$

$$\{u_n(t) = t^n\} \in \mathcal{U}$$

$$Y(u_n) = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Тогда $\mathcal{U}$ не явл-ся компакт.

Если пр-во банахово и рефлексивно, то в нем всё «работает», как в гильб. пр-ве //

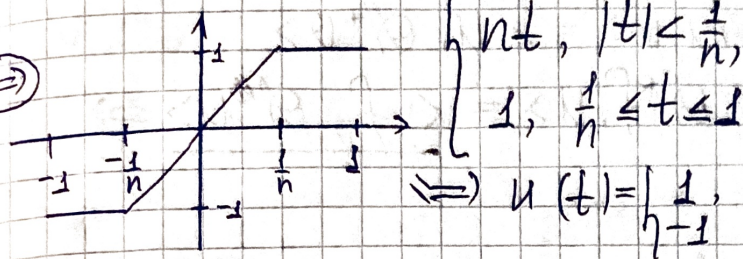
Пример 7 (д/общего развития, и)

$$J(u) = \int_{-1}^0 u(t) dt - \int_0^1 u(t) dt \rightarrow \inf$$

$$U = \{u(t) \in C[-1, 1] : \|u\| \leq 1\} - \text{мн-во}$$

$$J_* = -2; u_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, \\ nt, & |t| < \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

— миним. посл-ть $\Rightarrow$



5) Выпуклый вариант ∇ Вейерштрасса в шльб. пр-ве
 Опр мн-во U из мин. пр-ва явл-ся выпуклой, if $u, v \in U$,

$$\alpha u + (1-\alpha)v \in U, \forall \alpha \in [0, 1]$$

Опр $J(u)$ явл-ся вып. на вып.

мн-ве, if $\forall u, v \in U, \forall \alpha \in [0, 1]$

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)$$

∇ I.3. $\forall$ опр. замкн. выпукл. мн-во U

J будет явл-ся слабо комп.

∇ I.4. If $U \subset H$ — вып., то вып. на U ф-ция слабо п/н снизу $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ она п/н снизу на U .

∇ I.5 (Выпуклый вар-т ∇ Вейерштрасса) $\nabla U = H$ — шльб.,

$J(u)$ — п/н ~~с~~ снизу и вып., U — опр. замкн. и вып. $\Rightarrow$:

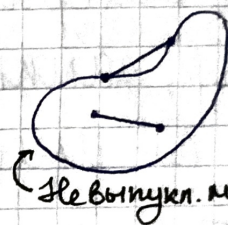
$$1) J_* > -\infty;$$

$$2) U_* \neq \emptyset;$$

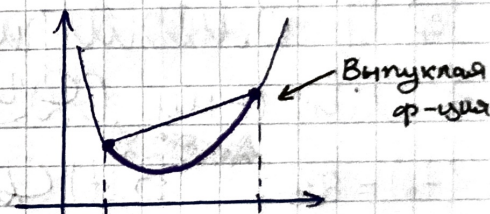
$$3) \forall \{u_n\} - \text{миним. в } (1) \xrightarrow{\text{слабо}} U_*$$



Выпукл. мн-во



Не выпукл. мн-во



Выпуклая ф-ция

6) Минимизация квадратичного функционала

$\nabla H, F$ — шльб.; $\langle \cdot, \cdot \rangle_H, \langle \cdot, \cdot \rangle_F$; $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$. Такие

оп-ры образуют банахово пр-во, $\|A\| = \sup_{\|u\|_H \leq 1} \|Au\|_F$

$\chi \quad J(u) = \|Au - f\|_F^2, f \in F, u \in H$. Такой функционал называется квадратич. функционалом типа невязки $\|Ax=b$. Он слабо п/н снизу. Покажем это. (по опр-нию) $\|Ax=b\|^2 \geq 0$

▲ Возьмем $\forall \{u_n\} \xrightarrow{\text{слабо}} u$. Покажем, что $Au_n \xrightarrow{\text{слабо}} Au$; известно, что $\exists A^* \in L(F \rightarrow H): \langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$
 $\langle f, Au_n \rangle_F = \langle A^*f, u_n \rangle_H \xrightarrow[\text{ср. с } u_n]{\text{слабо}} \langle A^*f, u \rangle = \langle f, A^*u \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow Au_n - f \xrightarrow{\text{слабо}} Au - f$
 $\|v\|^2 - \text{слабо п/н снизу} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Au_n - f\|^2 \geq \|Au - f\|^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|Au - f\|^2 - \text{сл. п/н снизу, что} \blacksquare$

§ 1.6 (Вейерштрасса д/квadrat. функц-ла) $\square M=H$ -ильб, U -опр, замкн и вып $\Rightarrow$ задача минимизации квадрат функц-ла имеет реш. $\forall$ ливним $\{u_n\} \xrightarrow{\text{слабо}} u_*$

§) Вейерштрасса д/задачи ОУ линейной с-мой $\neq$ мин с-му ОДУ: $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), t \in [t_0, T]$
 $x(t_0) = x_0; \quad B(t), A(t), f(t)$ - м-цы с кусочно непр. эл-тами; $u(t)$ - управление

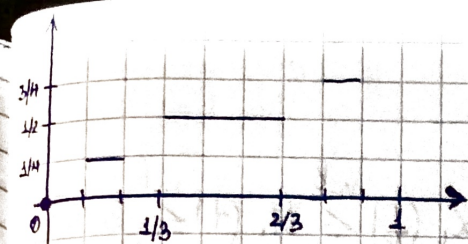
$u \in L_2^r[t_0, T]$
 $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)), u_i(t) \in L_2[t_0, T]$
 $\|u\|_{L_2^r(t_0, T)}^2 = \int_{t_0}^T \|u\|_{E^r}^2 dt = \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^r u_i^2(t) dt$
 неважно $(\cdot)$ или $[\cdot]$

$\langle u, v \rangle_{L_2^r(t_0, T)} = \int_{t_0}^T \langle u, v \rangle_{E^r} dt = \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^r u_i(t) v_i(t) dt$

Что мы понимаем под реш-м нашей задачи (7.1)?
 Опр Реш-м зад Коши (7.1), соотв. управлению $u(t) \in L_2^r(t_0, T)$
 будем называть $x(t) = x(t; u)$: 1) $x(t) \in C[t_0, T]$; 2) удовл. ОДУ Вольтерра I рода, т.е. $\dot{x}(t; u) = \int_{t_0}^t (A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) + f(\tau)) d\tau + x_0$, $\|u\|$ св-во 1) и 2) $\Rightarrow$ абс. непр-то

Пример $\dot{x}(t) = 0, x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = 0$. Есть ли еще реш-я? Да! Канторова лестница! (Рис. на след. стр.) Но не св-во из опр

не удобно :(



7а) Задача ОУ д/ мин с-мы с терминальным функцией
Как выбрать управление?

$$(7.2) \quad J(u) = \|x(T; u) - v\|_{E^n}^2 \rightarrow \inf_{u \in U}$$

↑ терминальный функцией

$$(7.3) \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = 0 \quad \text{— } x \text{ с начала сокращая вар-т (7.1)}$$

Введем $\mathcal{A}$: (7.4) $\mathcal{A}u = x(T; u)$, приведем $L_2^r(t_0, T) \rightarrow E^n$

В силу $\exists u$! реш. зад. (7.1) имеет место (7.5) $x(t; \alpha u + \beta v) = \alpha x(t; u) + \beta x(t; v)$, $\forall u, v \in E_2^r(t_0, T)$, $\forall t \in [t_0, T]$

$$(7.4) \rightarrow (7.5) \Rightarrow \mathcal{A}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{A}u + \beta \mathcal{A}v \Rightarrow \text{оп-т}$$

$\mathcal{A}$ линейн. $\mathcal{A}$ -м теперь оп-тб: $\exists C > 0: \|\mathcal{A}u\|_F \leq C \|u\|_H$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \|x(t; u)\|_{E^n}^2 = \left\| \int_{t_0}^t (Ax(\tau) + Bu(\tau)) d\tau \right\|_{E^n}^2 \leq \int_{t_0}^t (\|Ax\|_{E^n}^2 + \|Bu\|_{E^n}^2) d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \sup \|A(\tau)\| \cdot \|x(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^t \sup \|B\| \|u\|_{E^n} d\tau \\ &\leq A_{\max} \int_{t_0}^t \|x(\tau)\|_{E^n} d\tau + \int_{t_0}^t B_{\max} \|u\|_{E^n} d\tau \end{aligned}$$

$0 \leq \varphi(t) \leq A_{\max} \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau + \text{Const} \Rightarrow$ по лемме Гронмана-Беллмана $\Rightarrow 0 \leq \varphi(t) \leq \text{Const} e^{\frac{A_{\max}}{\Gamma}(t-t_0)} \Rightarrow \|x(t; u)\|_{E^n} \leq e^{\frac{A_{\max}}{\Gamma}(T-t_0)}$

$$B_{\max} \cdot \int_{t_0}^T \|u\|_{E^n} d\tau \leq$$

$$\text{// пер-во К-В: } \langle a, b \rangle \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

$$\Leftrightarrow C_{\pm} \sqrt{\int_{t_0}^T 1^2 dt} \sqrt{\int_{t_0}^T \|u\|_{E^n}^2 dt} = C \|u\|_{L_2^r(t_0, T)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7.7) \quad \|x(t; u)\|_{E^n} \leq C \|u\|_{L_2^r(t_0, T)}, \quad \forall t \in [t_0, T];$$

$$\text{при } t=T \quad \|x(T; u)\| = \|\mathcal{A}u\|$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}\text{-оп} \Rightarrow J(u) = \|x(T; u) - v\|_{E^n}^2 = \|\mathcal{A}u - v\|^2 \rightarrow \inf, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \rightarrow E^n)$$

Чаще всего (7.2) встречается на лн-вах U :

$$U_1 = \{u \in L_2^r(t_0, T) : \|u - u_0\| \leq R\} \quad \text{— слабо комп.}$$

Пример $\int_0^1 (u(t) - \sin t)^2 dt \leq 5$ — map
 $\|u - \sin t\|^2$

$U_2 = \{\text{параметризации}\} = \{u(t) \in L_2^n(t_0, T) : \tilde{\alpha}_i(t) \stackrel{n.b.}{\leq} u_i(t) \leq \tilde{\beta}_i(t) \stackrel{n.b.}{\}$

Д/г: $\{ \|u\| \leq 1 \} \subset L_2(0,1)$; $\{ |u(t)| \leq 1 \} \in L_2(0,1)$. Какое из этих мн-в шире?

извест. ф-ция

Как вернуться к (7.1)? Реш-е (7.1) $x(t; u) = x_1(t; u) + x_2(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax + Bu, \\ x_1(t_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = Ax + f, \\ x_2(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x_2(t) - \text{извест. величина}$$

$$J(u) = \|x_1(T; u) + \underbrace{x_2(T) - b}_{-b}\|^2 = \|x_1(T; u) - b\|^2$$

(7.8) 4б) ЗОУ д/ мин-с-мы с интеграл. функц-и

$$J(u) = \int_{t_0}^T \|x(t; u) - b(t)\|_{E^n}^2 dt \rightarrow \inf$$

$\hookrightarrow$ интеграл. функц-и

$$\|Au - b\|_{L_2^n(t_0, T)}^2, \text{ где } Au = x(t, u): L_2^n(t_0, T) \rightarrow L_2^n(t_0, T),$$

$A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ [мин-тм из (7.5), оп-тм из (7.7)]

$$\|Au\|_{L_2^n} \leq C \|u\|_{L_2^n}$$

$$\left\{ \|Au\|_{L_2^n}^2 = \int_{t_0}^T \|x\|_{E^n}^2 dt \right\} \leftarrow \text{интегр. сводится к квадрат. аналитич. терминал. (7.6)}$$